

# 非平稳分形随机信号波形估计的最优门限方法

张可数<sup>1</sup>, 马 洪<sup>1</sup>, 游志胜<sup>2</sup>, 梅田三千雄<sup>3</sup>

(1. 四川大学数学学院, 四川成都 610064; 2. 四川大学计算机学院, 四川成都 610064; 3. 大阪电气通信大学情报工学部, 日本大阪府寝屋川市)

**摘 要:** 本文用基于最小均方差准则的最优门限方法估计叠加高斯白噪声的分形布朗运动, 并给出其离散小波变换分解级数确定方法. 与多尺度维纳滤波相比, 本方法不需估计 1/f 类分形信号的方差, 且其离散小波变换分解级数可预先确定, 因此有着更好的实用性和可操作性.

**关键词:** 分形信号; 分形布朗运动; 1/f 过程; 信号估计; 小波变换

**中图分类号:** TN911.7 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2001) 09-1161-03

## Waveform Estimation of Non-Stationary Fractal Stochastic Signals Using Optimum Threshold Technique

ZHANG Ke-shu<sup>1</sup>, MA Hong<sup>1</sup>, YOU Zhi-sheng<sup>2</sup>, Michio Umeda<sup>3</sup>

(1. Dept. of Mathematics, Sichuan University, Chengdu, Sichuan 610064, China;

2. Dept. of Computer Science, Sichuan University, Chengdu, Sichuan 610064, China;

3. Dept. of Information Engineering, Osaka Electro-Communication University, Japan)

**Abstract:** Based on the minimum mean-square error, this paper offers an optimum threshold method of estimating the 1/f-type fractal signals with the additive white noise. The paper also provides the method of determining the wavelet decomposition scale. Compared with the multiscale Wiener filter, the optimum threshold method is more practical and maneuverable because it doesn't estimate the variance of 1/f-type fractal signals and the wavelet decomposition scale can be determined in advance.

**Key words:** fractal signal; fractional Brownian motion; 1/f processes; signal estimation; wavelet transform

### 1 引言

1/f 类分形随机过程(简称 1/f 过程)是一类重要的随机过程, 在信息工程中有着广泛的应用. 1/f 过程可以是平稳随机过程, 也可以是非平稳随机过程. 如分形布朗运动<sup>[5]</sup>(fractional Brownian motion, 简记为 FBM)就是非平稳 1/f 过程的一个典型例子.

参数为  $H(0 < H < 1)$  的分形布朗运动  $B_H(t)$  定义如下:

$$B_H(t) = [\Gamma(H + \frac{1}{2})]^{-1} \left\{ \int_{-\infty}^0 [(t-s)^{H-\frac{1}{2}} - (-s)^{H-\frac{1}{2}}] dB(s) + \int_0^t (t-s)^{H-\frac{1}{2}} dB(s) \right\}$$

上式中, 若  $t < 0$ , 则记号  $\int_0^t$  被理解为  $-\int_t^0$ .

显然,  $B_H(t)$  是一个零均值高斯过程, 且  $B_H(0) = 0$ . 此外, 当  $H = \frac{1}{2}$  时,  $B_H(t) = B(t)$ ,  $t \in R$ ,  $B(t)$  为经典布朗运动. 可见分形布朗运动是对经典布朗运动的推广. 因为  $B_H(t)$  的相关函数为:

$$R_{B_H}(t, s) = E[B_H(t)B_H(s)] = \frac{\sigma^2}{2} (|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t-s|^{2H}), s, t \in R \quad (1)$$

故分形布朗运动  $B_H(t)$  是一个非平稳随机过程.

近年来, 已提出了几种基于小波变换的方法估计噪声环境下的 1/f 类分形信号, 以克服传统方法不能去相关性的缺点. 如 Wornell 和 Oppenheim 提出的小波域中的最大似然估计方法<sup>[7]</sup>; Chen 等提出的考虑系统影响的多尺度维纳滤波方法<sup>[1]</sup>. 本文提出一种基于最小均方差准则的最佳门限方法, 其在加性高斯白噪声环境下, 估计非平稳 1/f 类分形信号时不需估计信号的方差. 此外, 本文也提供了离散小波变换分解级数的确定方法, 使信号估计更加简单.

### 2 分形布朗运动的小波系数性质

将分形布朗运动  $B_H(t)$  作小波级数展开可得:

$$B_H(t) = 2^{-J/2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_j[n] \varphi(2^{-j}t - n) + \sum_{j=-\infty}^J 2^{-j/2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_j[n] \phi(2^{-j}t - n) \quad (2)$$

收稿日期: 2000-03-15; 修回日期: 2001-05-08

基金项目: 国家自然科学基金(No. 19971063); 国家自然科学基金重点项目(No. 69732010)

$$\begin{aligned} d_j[n] &= 2^{-j/2} \int_{-\infty}^{\infty} B_H(t) \phi(2^{-j}t - n) dt \\ a_j[n] &= 2^{-j/2} \int_{-\infty}^{\infty} B_H(t) \varphi(2^{-j}t - n) dt \end{aligned}, j, n \in Z \quad (3)$$

这里  $\phi(t)$  为小波函数,  $\varphi(t)$  是相应的尺度函数. 值得注意的是, 对每一尺度  $j$ , 序列  $\{d_j[n], n \in Z\}$  是一个近似平稳序列<sup>[1]</sup>.  $n \neq 0$  时, 小波系数序列  $d_j[n]$  的自相关函数为:

$$\begin{aligned} R_j[n] &= E[d_j[m+n]d_j[m]] \\ &= \frac{\sigma^2}{2} \left( - \int_{-\infty}^{\infty} A_\phi(1, \tau - n) |\tau|^{2H} d\tau \right) (2^j)^{2H+1} \end{aligned} \quad (4)$$

其中,  $A_\phi(\alpha, \tau) = \sqrt{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) \phi(\alpha t - \tau) dt$ .

特别地, 当  $n=0$  时, 小波系数  $d_j[n]$  的方差为:

$$R_j[0] = \text{Var}(d_j[n]) = \frac{\sigma^2}{2} V_\phi(H) (2^j)^{2H+1} = \sigma_c^2 2^{2j} \quad (5)$$

其中,  $V_\phi(H) = - \int_{-\infty}^{\infty} A_\phi(1, \tau) |\tau|^{2H} d\tau$ ,  $\sigma_c^2 = \frac{\sigma^2}{2} V_\phi(H)$ .

系数  $a_j[n]$  的方差为:

$$\begin{aligned} \text{Var}(a_j[n]) &= \frac{\sigma^2}{2} \left( - \int_{-\infty}^{\infty} (A_\varphi(1, \tau) - 2\varphi(\tau - n)) \right. \\ &\quad \left. \cdot |\tau|^{2H} d\tau \right) (2^j)^{2H+1} \end{aligned} \quad (6)$$

其中,  $A_\varphi(\alpha, \tau) = \sqrt{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) \varphi(\alpha t - \tau) dt$ .

由式(6)可以看出,  $a_j[n]$  的方差  $\text{Var}(a_j[n])$  是关于参数  $j$  的单增函数, 且  $\lim_{j \rightarrow \infty} \text{Var}(a_j[n]) = +\infty$ .

### 3 最佳门限方法

考虑接收信号

$$y(k) = B_H(k) + W(k) \quad (7)$$

其中  $B_H(k)$  是待估的 FBM,  $W(k)$  是零均值,  $\sigma_w^2$  方差的加性遍历高斯白噪声. 从式(7)中估计  $B_H(k)$  的一种简单方法是, 对接收信号  $y(k)$  的小波系数设置一个门限, 仅让超过门限的那些显著小波系数用于逆离散小波变换来复原信号  $B_H(k)$ . 然而, 门限值的选取有如下制约: 提高门限以减少噪声的影响会使原信号估计结果失真加大, 因为大门限抑制了信号较小的小波系数, 使它们无法用于逆离散小波变换中; 反之, 降低门限减小了信号的失真, 但使噪声干扰影响增强, 因为将有较多的超过门限的噪声小波系数将用于逆离散小波变换中. 为此需要设计一个估计原信号的最优门限.

令  $a_0[k] = y(k)$ , 由于小波变换是线性变换, 所以接收信号的小波变换为原信号与噪声各自小波变换的线性迭加, 即:

$$y_j[n] = d_j[n] + W_j[n], j=1, 2, \dots, J \quad (8)$$

式中  $d_j[n]$  和  $W_j(n)$  分别是 FBM 与白噪声的小波系数序列. 序列  $\{W_j[n], n \in N\}$  是方差为  $\sigma_w^2$  的白噪声.

当  $J$  充分大时,  $N_0$  个样本点的 FBM 信号的小波级数展开近似为:

$$\begin{aligned} B_H(k) &\approx \sum_{j=1}^J 2^{-j/2} \sum_{n=0}^{(N_0/2^j)-1} d_j[n] \phi(2^{-j}k - n), \\ &k=0, 1, \dots, N_0-1 \end{aligned} \quad (9)$$

下面用基于最小均方误差最优门限方法估计  $d_j[n]$ . 记

$d_j[n]$  的估计值为  $\hat{d}_j[n]$ , 最优门限为  $L$ , 可取

$$\hat{d}_j[n] = \begin{cases} 0, & j \leq L \\ y_j[n], & j > L \end{cases} \quad (10)$$

欲使尺度为  $j$  的小波系数序列估计的最小均方误差为最小, 即:

$$\begin{aligned} \sigma_j^2 &= E\{(d_j[n] - \hat{d}_j[n])^2\} = \min\{R_j(0), \sigma_w^2\} \\ &= \begin{cases} \sigma_w^2, & \sigma_w^2 < R_j(0) \\ R_j(0), & \sigma_w^2 \geq R_j(0) \end{cases} \end{aligned} \quad (11)$$

则需  $L = \lceil \frac{1}{r} \log_2 \frac{\sigma_w^2}{\sigma_c^2} \rceil$ ,  $\lceil \cdot \rceil$  表取整. 因为  $R_j(0) = \sigma_c^2 2^{2j}$ , 所以  $j \leq \frac{1}{r} \log_2 \frac{\sigma_w^2}{\sigma_c^2}$  时,  $\sigma_w^2 \geq R_j^2(0)$ . 此时有

$$\hat{d}_j[n] = \begin{cases} 0, & j \leq L \\ y_j[n], & j > L \end{cases} \quad (12)$$

在波形估计中, 一般只给出  $1/f$  类分形信号谱密度指数  $r$  及信噪比  $x$ , 在这种情况下, 最优门限  $L$  可表为谱密度指数  $r$  与信噪比  $x$  的函数:

$$L = \lceil \frac{1}{r} \{ (1 - \frac{x}{10}) - \log_2 V_\phi(\frac{r-1}{2}) \} \rceil \quad (13)$$

用最门限方法估计样本点数为  $N_0$  的分形信号, 其均方误差<sup>[4]</sup>为:

$$\begin{aligned} \Delta &= E\{[B_H(k) - \hat{B}_H(k)]^2\} \\ &= \frac{1}{2^J} \sigma_w^2 + \sum_{j=1}^L R_j(0)/2^j + \sum_{j=L+1}^J \sigma_w^2/2^j \end{aligned} \quad (14)$$

### 4 离散小波变换分解级数确定方法

设  $J \geq J_0$  时  $\text{Var}(a_j[n]) \geq \sigma_w^2$ ,  $J < J_0$  时  $\text{Var}(a_j[n]) < \sigma_w^2$ . 所以取  $J \geq J_0$ , 这时式(15)成立.

**定理 1** 若  $J < L$ , 则  $\Delta_J$  随  $J$  的增大而减小.

**证明** 因为

$$\begin{aligned} \Delta_J &= \frac{1}{2^J} \sigma_w^2 + \sum_{j=1}^J R_j(0)/2^j \\ \Delta_{J+1} &= \frac{1}{2^{J+1}} \sigma_w^2 + \sum_{j=1}^J R_j(0)/2^j + \frac{R_{J+1}(0)}{2^{J+1}} \end{aligned}$$

$$\text{所以: } \Delta_{J+1} - \Delta_J = \frac{R_{J+1}(0)}{2^{J+1}} - \frac{\sigma_w^2}{2^{J+1}}$$

又因  $J+1 \leq L$ , 所以  $R_{J+1}(0) \leq \sigma_w^2$ , 即  $\Delta_{J+1} - \Delta_J \leq 0$ . 所以  $\Delta_J$  在  $J < L$  时随  $J$  的增大而减小.

**定理 2** 如  $J \geq L$ , 则  $\Delta_J$  为不随  $J$  变化的恒量.

**证明** 因为

$$\begin{aligned} \Delta_J &= \frac{1}{2^J} \sigma_w^2 + \sum_{j=1}^L R_j(0)/2^j + \sum_{j=L+1}^J \sigma_w^2/2^j \\ \Delta_{J+1} &= \frac{1}{2^{J+1}} \sigma_w^2 + \sum_{j=1}^L R_j(0)/2^j + \sum_{j=L+1}^J \sigma_w^2/2^j + \frac{1}{2^{J+1}} \sigma_w^2 \end{aligned}$$

$$\text{所以: } \Delta_{J+1} - \Delta_J = \frac{\sigma_w^2}{2^{J+1}} - \frac{\sigma_w^2}{2^{J+1}} = 0. \text{ 即: } \Delta_J \text{ 在 } J \geq L \text{ 时是不}$$

随  $J$  变化的常量.

由定理 1, 2 得最大分解级数  $M = \max\{J_0, L\}$ .

## 5 试验结果

计算机仿真试验验证本文提出的最佳门限方法有较好的效果.图 1 为山随机 Weierstrass 函数产生的零均值高斯分布的  $1/f$  类分形信号,样点数为 1000,谱密度指数  $r=1.7$ .图 2 为信噪比为 0dB 的分形信号与高斯白噪声之和的接收信号.选用 Harr 正交小波基,用最佳小波门限方法,从接收信号中估计出的分形信号如图 3,其中离散小波分解级数  $M=2$ ,估计信号误差  $\Delta=0.4967$ .图 4 为  $N=1$  的维纳滤波波形估计;估计信号误差  $\Delta'=0.4526$ . $\Delta-\Delta'=0.0441$ ,显示该方法有较好的效果.

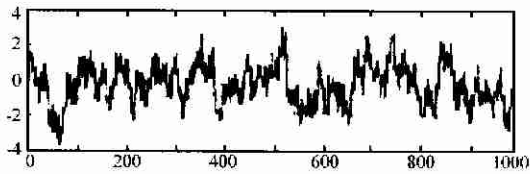


图 1  $1/f$  信号

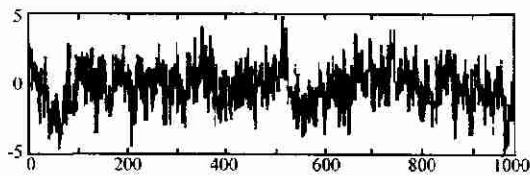


图 2 接收信号

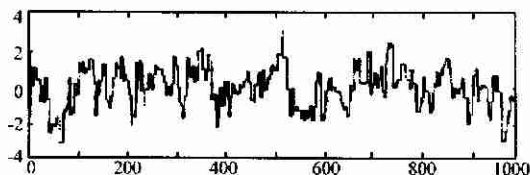


图 3 估计出的分形信号

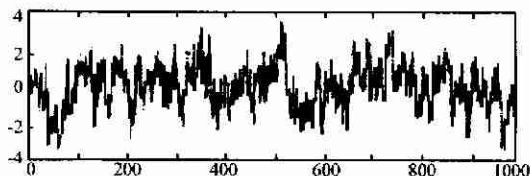


图 4 维纳滤波波形估计

## 6 结论

本文提出了一种从加性高斯白噪声中估计  $1/f$  类分形信号的最佳门限方法,其在最小均方误差意义下是最优的.由于

门限在谱密度指数与正交小波基确定后仅与信噪比相关,因此该方法也具有自适应性.与传统方法相比,不需估计信号方差,且其离散小波变换分解级数可预先确定,因此有较好的实用性和可操作性.

## 参考文献:

- [1] Chen B S, Lin G W. Multiscale Wiener filter for the restoration of fractal signals: Wavelet filter bank approach[J]. IEEE Trans. Signal Processing, 1994, 42(11): 2972 - 2982.
- [2] Flandrin P. On the spectrum of fractional Brownian motion [J]. IEEE Trans. Information Theory, 1989, 35(1): 197 - 199.
- [3] Flandrin P. Wavelet analysis and synthesis of fractional Brownian motion [J]. IEEE Trans. Information Theory, 1992, 38(2): 910 - 917.
- [4] Gustavo A Hirchoren, Carlos E D' Attellis. Estimation of fractal signals using wavelet and filter banks [J]. IEEE Trans. Signal processing, 1998, 46(6): 1624 - 1630.
- [5] Mandelbrot B B, Van Ness J W. Fractional Brownian motions, fractional motions, fractional noises and applications [J]. SIAM Rev., 1968, 10(4): 422 - 437.
- [6] Wornell G W. A Karhunen-Loeve Expansion for  $1/f$  Processes via Wavelets [J]. IEEE Trans. Information Theory, 1990, 36(4): 859 - 861.
- [7] Wornell G W, Oppenheim A V. Estimation of fractal signals from noisy measurements using wavelet [J]. IEEE Trans. Signal Processing, 1992, 40(3): 611 - 623.

## 作者简介:



张可数 女,1975 年生于四川成都,四川大学数学学院概率统计专业博士研究生.研究领域是数据融合、跟踪、图像处理、模式识别、语音信号处理等.



马洪男,1945 年生于四川成都,四川大学数学学院教授,概率统计教研室主任.主要研究方向有随机过程、随机信号处理、图像处理、模式识别、信源编码.